Aula 23

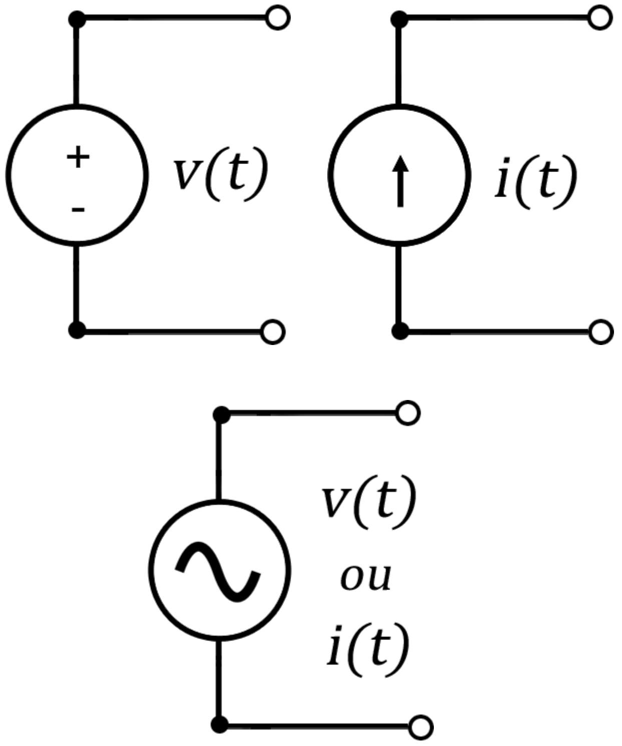
Fasores I

Circuitos Elétricos I

Prof. Henrique Amorim - UNIFESP - ICT - 2016

Fontes senoidais

Exemplo de representações de fontes senoidais



- Fontes senoidais podem ser expressar em funções de senos ou cossenos
- A função senoidal se repete periodicamente

$$v(t) = \mathrm{V_m}\cos(\omega t + \phi) \quad \text{ou} \quad i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi)$$

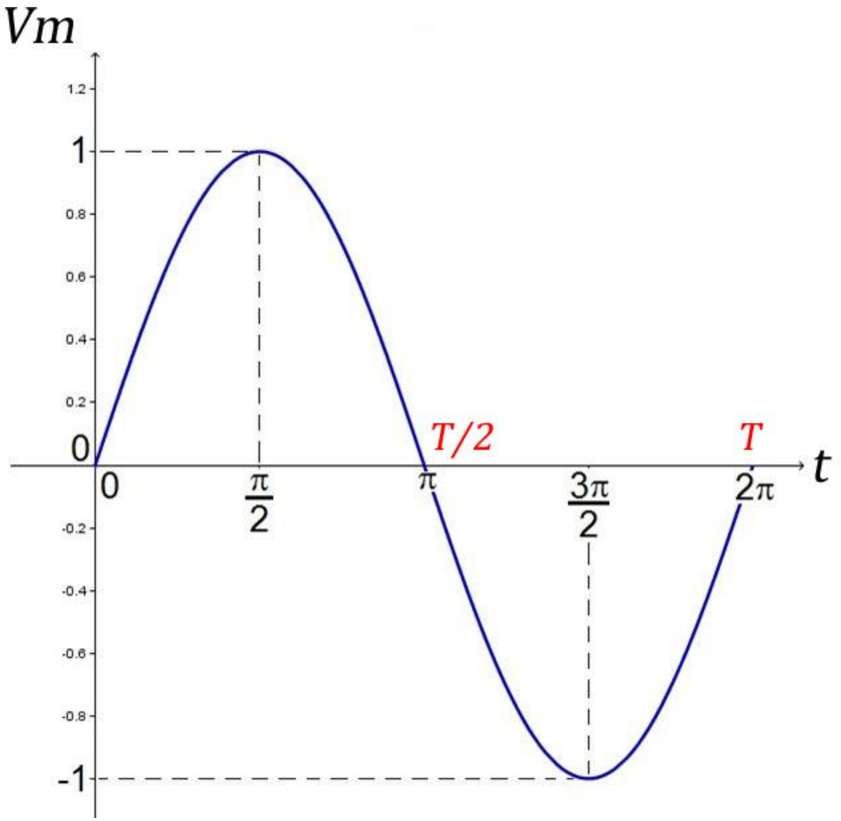
$\boldsymbol{V_m}$ → Amplitude da senoide (tensão - V)

$\boldsymbol{I_m}$ → Amplitude da senoide (corrente - A)

$\boldsymbol{\omega}$ → Frequência angular (rad/s)

$\boldsymbol{\phi}$ → Fase (graus ou radianos)

Fontes senoidais



$$f = \frac{1}{T} \rightarrow Hz \qquad \omega = 2\pi f$$

A senoide se repete a cada T segundos

T → Período (segundos)

Se $\omega \rightarrow rad/s$ e a cada 2π temos um período ($T\ - s$)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

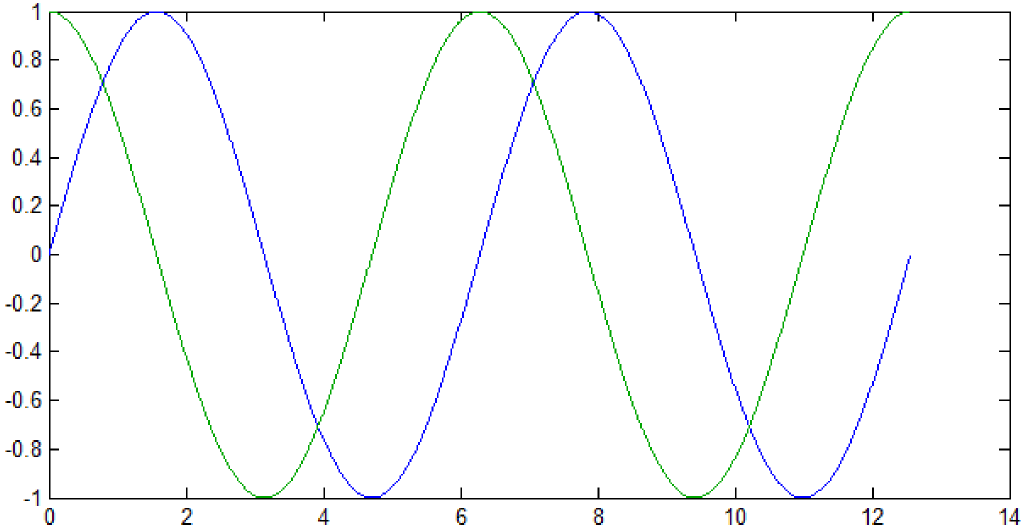
O inverso do período de uma função periódica é o tempo de um ciclo completo, medido em frequência.

Por exemplo, a rede doméstica brasileira trabalha em uma frequência de 60Hz, seja, a cada 1 Segundo ocorrem 60 ciclos.

Fontes senoidais

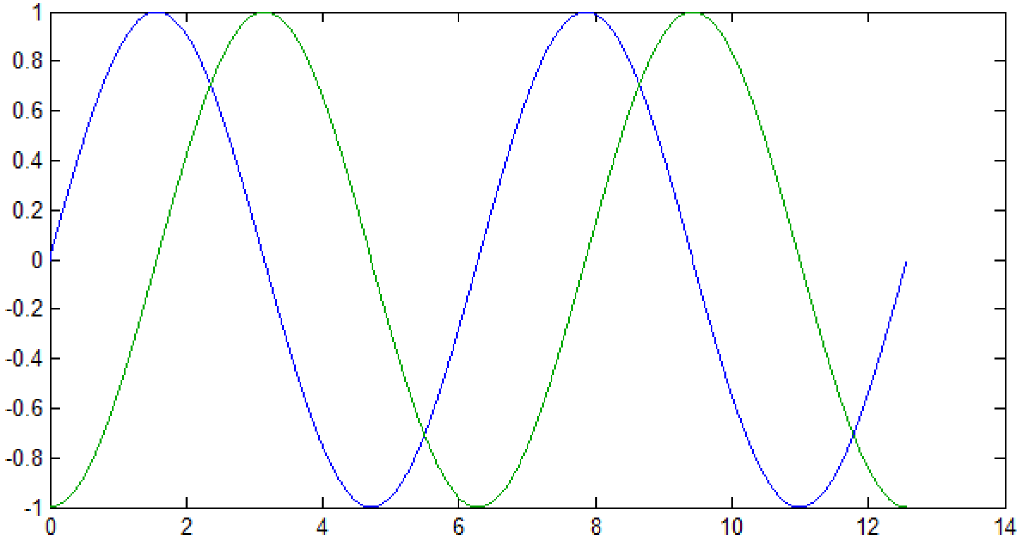
Deslocamento de fase: $90^o \rightarrow \frac{\pi}{2}$

- $x = sen(\omega t)$
- $x = sen(\omega t + 90^o)$



Deslocamento de fase:

- $x = sen(\omega t)$
- $x = sen(\omega t - 90^o)$



Identidades trigonométricas

$$sen(A \pm B) = sen(A) \cdot \cos(B) \pm \cos(A) \cdot sen(B)$$

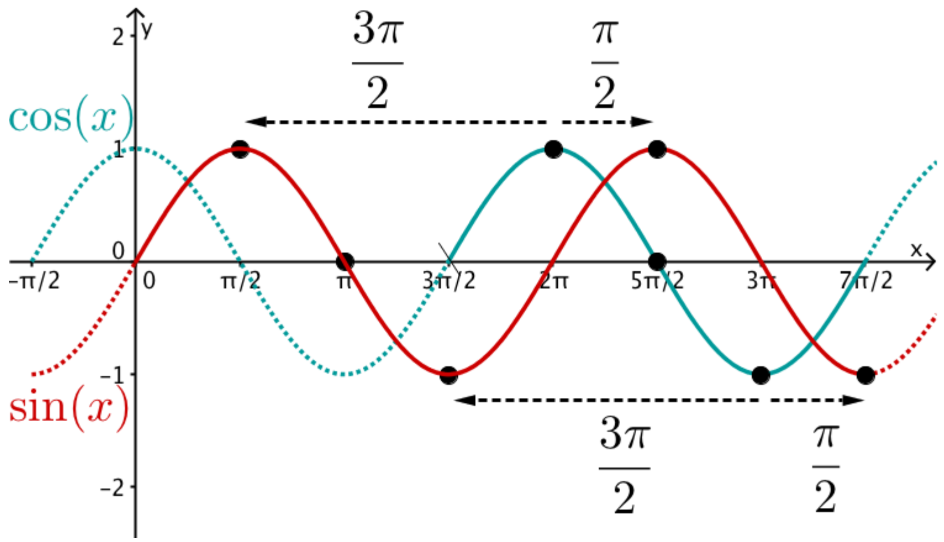
$$cos(A \pm B) = cos(A) \cdot \cos(B) \mp \text{sen}(A) \cdot sen(B)$$

$$sen(\omega t \pm \pi) = sen(\omega t \pm 180^o) = -sen(\omega t)$$

$$cos(\omega t \pm \pi) = cos(\omega t \pm 180^o) = -cos(\omega t)$$

$$sen\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) = sen(\omega t \pm 90^o) = \pm cos(\omega t)$$

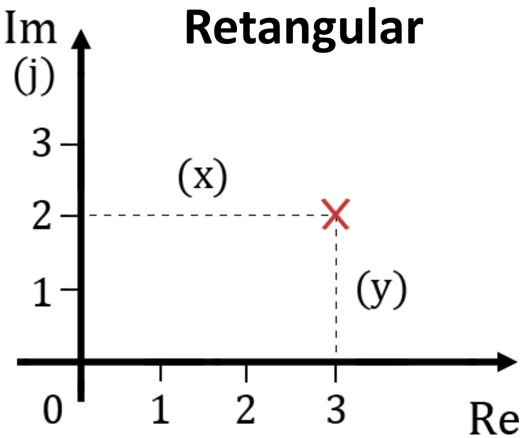
$$cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) = cos(\omega t \pm 90^o) = \mp sen(\omega t)$$



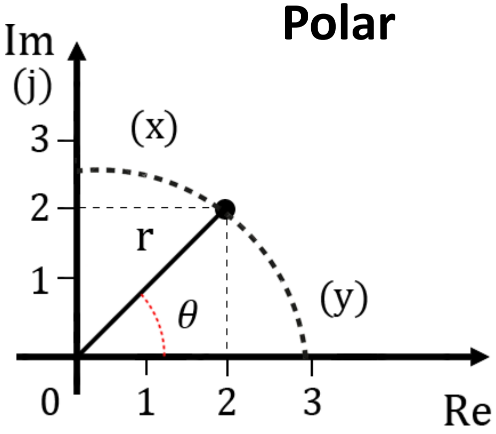
Números complexos ($j = \sqrt{-1}$)

Os números complexos podem ser expressos em 3 formas:

Retangular



Polar



Retangular:

$z = x + y$

$\boldsymbol{z = 3 + 2j}$

Polar:

$z = r\angle\theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \mathrm{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$*

$z = \sqrt{8}\,\angle\,\mathrm{atan}(1)$

$\boldsymbol{z = \sqrt{8}\,\angle 45^o}$

Considere que:

$\cos(\theta) = \frac{CA}{h} = \frac{x}{r}$

$\boldsymbol{x = r \cdot cos(\theta)}$

$sen(\theta) = \frac{CO}{h} = \frac{y}{r}$

$\boldsymbol{y = r \cdot sen(\theta)}$

Retangular:

$z = r\big(\cos(\theta) + j sen(\theta)\big)$

Identidade de Euler:

$e^{\pm j\theta} = \cos(\theta) \pm j sen(\theta)$

Exponencial:

$\boldsymbol{z = r \cdot e^{j\theta}}$

No segundo quadrante somamos 180º de θ
No terceiro quadrante subtraímos 180º de θ

Números complexos – Transformações

Retangular $\rightarrow$ Polar

Temos:
$z = x + jy$

Queremos:
$z = r\angle\theta$

$$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\boldsymbol{\phi = \mathrm{atan}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Polar $\rightarrow$ Retangular

Temos:
$z = r\angle\theta$

Queremos:
$z = x + jy$

$$\boldsymbol{x = r \cdot cos(\theta)}$$
$$\boldsymbol{y = r \cdot \mathrm{sen}(\theta)}$$

Como a forma exponencial utiliza as relações polares, assim:

Retangular $\rightarrow$ Exponencial

Transformar para polar e:

$$\boldsymbol{z = r \cdot e^{j\theta}}$$

Polar $\rightarrow$ Exponencial

Apenas colocar na forma:

$$\boldsymbol{z = r \cdot e^{j\theta}}$$

Números complexos – Operações

Adição e subtração → **forma retangular**
Multiplicação e divisão → **forma polar**

$$\boldsymbol{z_1 = x_1 + jy_1 = r_1\angle\theta_1}$$

$$\boldsymbol{z_2 = x_2 + jy_2 = r_2\angle\theta_2}$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_x) + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_x) + j(y_1 - y_2)$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\angle(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{r_1}\angle\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$$

Exercício: Simplifique:

$$(40\angle 50^o + 20\angle - 30^o)^{\frac{1}{2}}$$

Resposta:
$\boldsymbol{6,91\angle 12,81^o}$

Números complexos – Operações

Exercício: Simplifique:

$$(40\angle 50^o + 20\angle -30^o)^{\frac{1}{2}}$$

**Lembrem-se de utilizar a calculadora em graus

**Conversão graus → radianos: $\boldsymbol{\pi} \rightarrow \mathbf{180^o}$

$$40\angle 50^o = 40\big(cos(50^o) + jsen(50^o)\big) = 25{,}71 + j \cdot 30{,}64$$

$$20\angle{-30^o} = 20\big(cos(-30^o) + jsen(-30^o)\big) = 17{,}32 - j \cdot 10$$

$$\mathbf{40\angle 50^o + 20\angle - 30^o = 43,03 + j20,64}$$

$$r = \sqrt{43{,}03^2 + 20{,}64^2} = 47{,}72 \qquad \theta = \text{atan}\left(\frac{20{,}64}{43{,}03}\right) = 25{,}62^o$$

$$\sqrt{\mathbf{47,72\ \angle 25,62^o}} = \sqrt{\mathbf{47,72}}\,\angle\frac{\mathbf{25{,}62}}{\mathbf{2}} = \mathbf{6,91\angle 12,81^o}$$

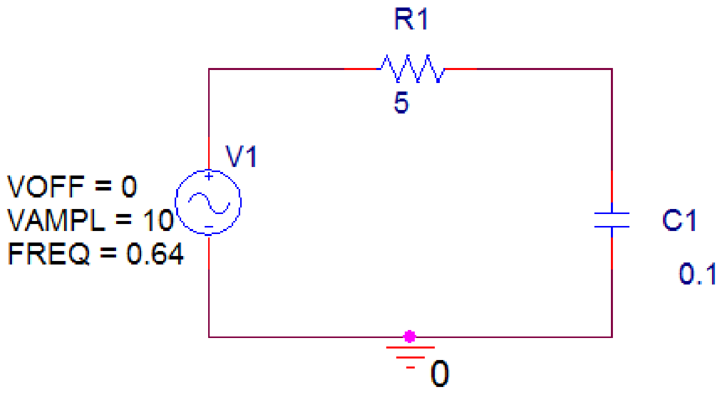
Exemplo

$$V_s(t) = 10 \cdot cos(4 \cdot t\,)V$$

Note que a frequência é constante

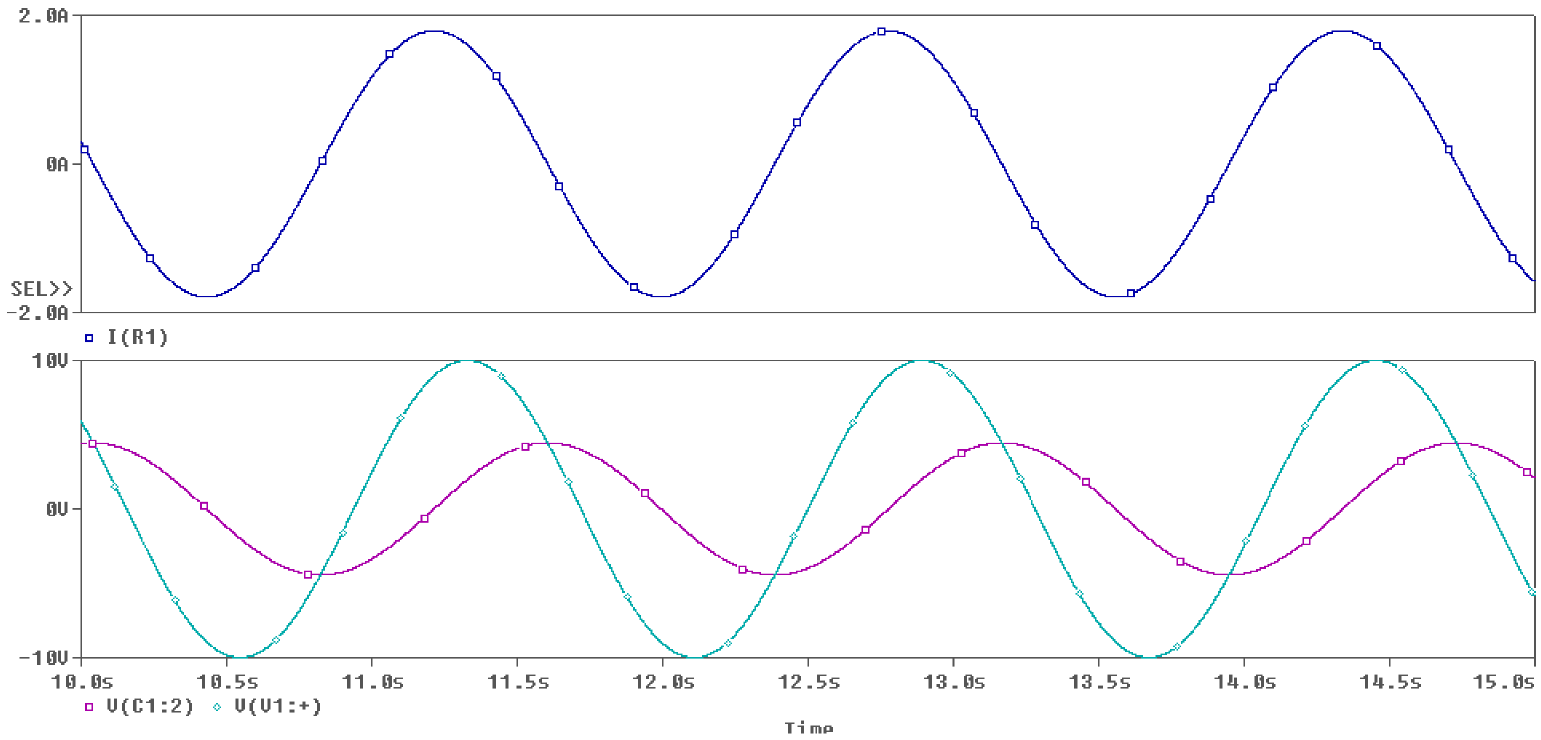
$$i(t) = 1{,}79 \cdot cos(4 \cdot t + 26{,}56^o\,)A$$

$$v_C(t) = 4{,}47 \cdot cos(4 \cdot t - 63{,}43^o\,)V$$



$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{4}{2 \cdot \pi} = 0{,}64Hz$$

Corrente



Tensão (fonte x capacitor)

Fasor é a representação complexa da magnitude e fase de uma senoide

Dedução do fasor:

$e^{j\theta} = cos(\theta) + jsen(\theta) \rightarrow Identidade\ de\ Euler$

$cos(\theta) = \Re\left(e^{j\theta}\right) \rightarrow \boldsymbol{Parte\ Real}$

$sen(\theta) = \Im\left(e^{j\theta}\right) \rightarrow \boldsymbol{Parte\ Imagin\text{á}ria}$

$v(t) = V_m\,cos(\omega t + \phi) = \Re(V_m \cdot e^{j(\omega t + \phi)})$

$v(t) = \Re\left(V_m \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}\right)$

$v(t) = \Re\left(\mathbb{V} \cdot e^{j\omega t}\right) \quad onde$

$\mathbb{V} = \boldsymbol{V_m e^{j\phi}}$

$$\mathbb{V} = V_m e^{j\phi} \quad ou \quad \mathbb{V} = V_m \angle \phi$$

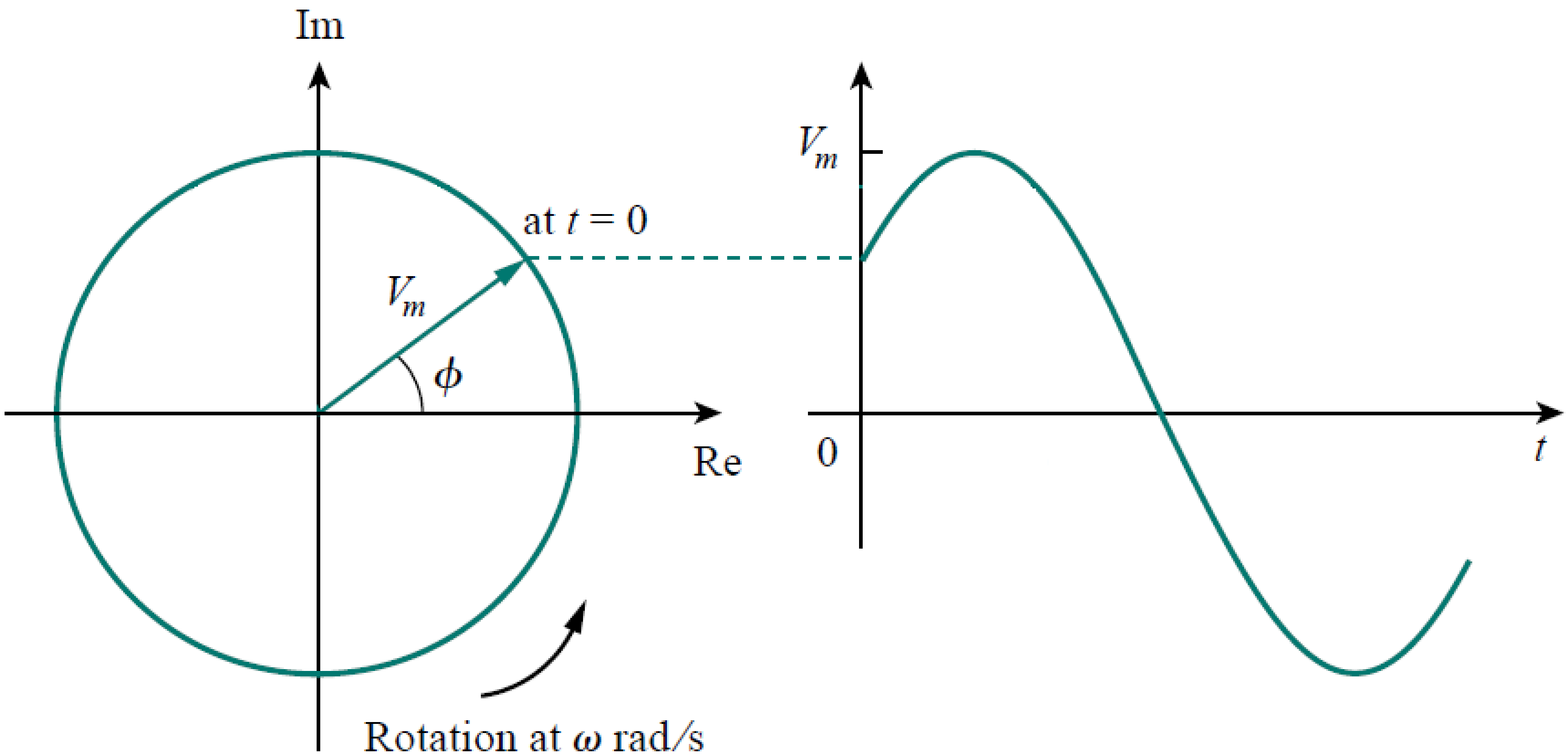
É a representação fasorial de uma fonte senoidal

Fasor

Fasor é a representação complexa da magnitude e fase de uma senoide

$$\mathbb{V} = \boldsymbol{V_m e^{j\theta}} = \boldsymbol{V_m \angle \phi}$$

$$\boldsymbol{v(t)} = \boldsymbol{V_m cos(\omega t + \phi)} = \Re(\mathbb{V} \cdot \boldsymbol{e^{j\omega t}})$$



Fasor

Representação no domínio do tempo:

$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$

$v(t) = V_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = V_m \cos(\omega t + \phi - 90^o)$

$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$

$i(t) = I_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = I_m \cos(\omega t + \phi - 90^o)$

Representação no domínio dos fasores:

$\mathbb{V} = V_m \angle \phi$

$\mathbb{V} = V_m \angle (\phi - 90^o)$

$\mathbb{I} = I_m \angle \phi$

$\mathbb{I} = I_m \angle (\phi - 90^o)$

Derivada e integral no domínio dos fasores

Derivada no domínio dos fasores

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \Re(\mathbb{V} \cdot e^{j\omega t})$$

$$\frac{dv}{dt} = -w \cdot V_m\, sen(\omega t + \phi) = w \cdot V_m\, cos(\omega t + \phi + 90^o)$$

$$\frac{dv}{dt} = \Re(\omega \cdot V_m \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j\cdot 90^o})$$

$$\frac{dv}{dt} = \Re(\omega \cdot \boldsymbol{V_m} \cdot \boldsymbol{e^{j\phi}} \cdot e^{j\omega t} \cdot j)$$

$$\frac{dv}{dt} = \Re(j \cdot \omega \cdot \mathbb{V} \cdot e^{j\omega t})$$

$$e^{j\cdot 90^o} = j$$

$$e^{j\cdot 90^o} = \cos(90^o) + j sen(90^o)$$

$$e^{j\cdot 90^o} = 0 + j1$$

$$\mathbb{V} = \boldsymbol{V_m e^{j\phi}}$$

Derivada e integral no domínio dos fasores

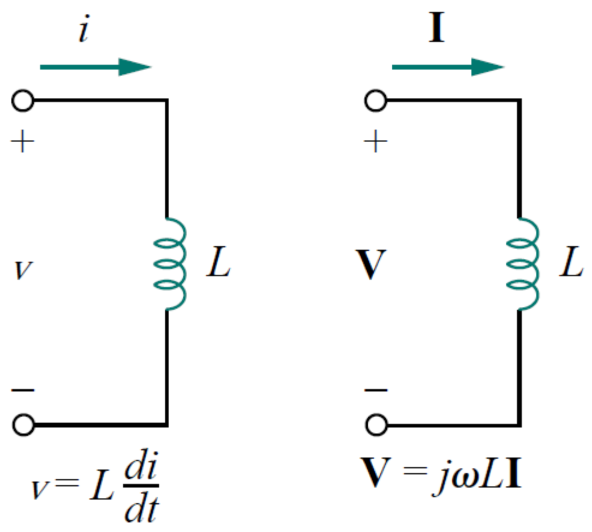
Quando comparamos a derivada no domínio do tempo e dos fasores, concluímos que a derivada, no domínio dos fasores, passa a ser considerada uma simples multiplicação. Tais relações também são validas para a corrente, uma vez que a corrente também obedece a uma função senoidal

Domínio do tempo		**Domínio dos fasores**
$\dfrac{dv}{dt}$	$\Longleftrightarrow$	$j\omega\mathbb{V}$
$\displaystyle\int v\,dt$		$\dfrac{\mathbb{V}}{j\omega}$

* Foram omitidos os cálculos para dedução da integral, porém seguem o mesmo raciocínio

Tensão, corrente e impedância

Analisando o indutor no domínio dos fasores, temos:



$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

Quanto maior a frequência, maior a impedância

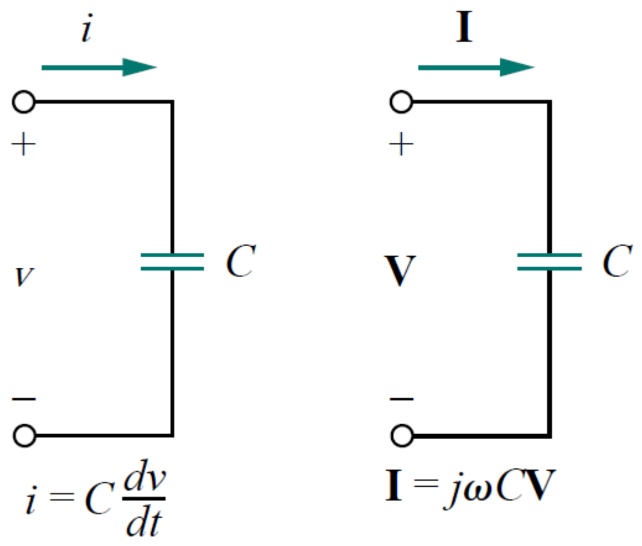
$$\mathbb{V} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \mathbb{I} \rightarrow tensão\ (V)$$

$$\mathbb{I} = \frac{\mathbb{V}}{\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L}} \rightarrow corrente\ (A)$$

$$\frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} = \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L} \rightarrow Impedância\ (\Omega)$$

Tensão, corrente e impedância

Analisando o capacitor no domínio dos fasores, temos:



$$\mathbb{I} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \mathbb{V} \rightarrow corrente\ (A)$$

$$\mathbb{V} = \frac{\mathbb{I}}{\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{C}} \rightarrow tensão\ (V)$$

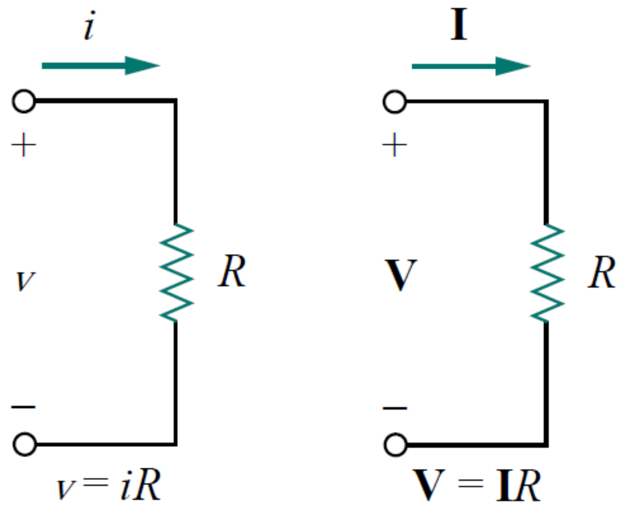
$$\frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} = \boldsymbol{Z} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{C}} \rightarrow Impedância\ (\Omega)$$

$$i_C(t) = C\,\frac{dv_C(t)}{dt}$$

Quanto maior a frequência, menor a impedância

Tensão, corrente e impedância

Analisando o resistor no domínio dos fasores, temos:



$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

No resistor a frequência não influência na impedância

$$\mathbb{V} = \boldsymbol{R} \cdot \mathbb{I} \rightarrow tensão\ (V)$$

$$\mathbb{I} = \frac{\mathbb{V}}{\boldsymbol{R}} \rightarrow corrente\ (A)$$

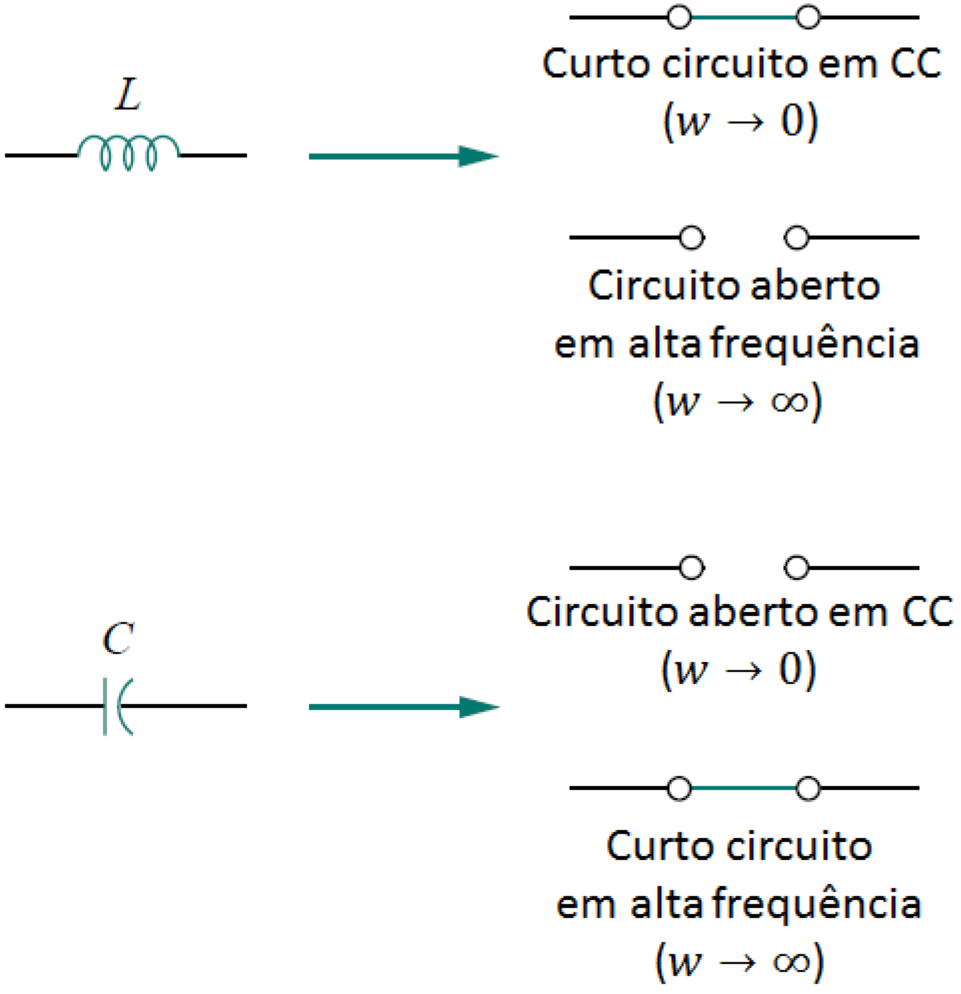
$$\frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} = \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{R} \rightarrow Impedância\ (\Omega)$$

Tensão, corrente e impedância

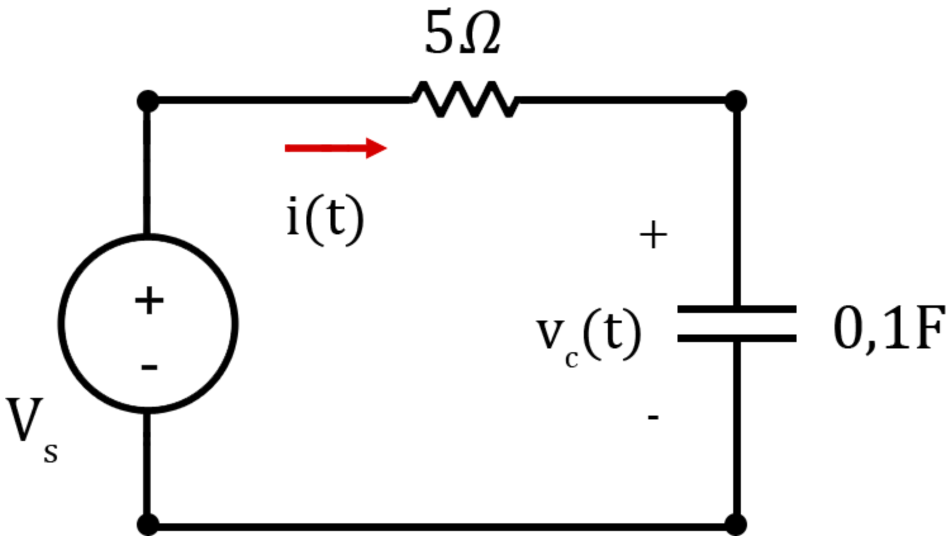
Impedância representa a oposição que um circuito oferece ao fluxo de corrente senoidal

Impedância e admitância de elementos passivos

Elemento	Impedância	Admitância
R	$\mathbf{Z} = R$	$\mathbf{Y} = \dfrac{1}{R}$
L	$\mathbf{Z} = j\omega L$	$\mathbf{Y} = \dfrac{1}{j\omega L}$
C	$\mathbf{Z} = \dfrac{1}{j\omega C}$	$\mathbf{Y} = j\omega C$



Exercício: Dado o circuito, em regime permanente, encontre as expressões i(t) e vc(t). Considere que $\boldsymbol{V_s(t) = 10 \cdot \cos(4t)\,V}$

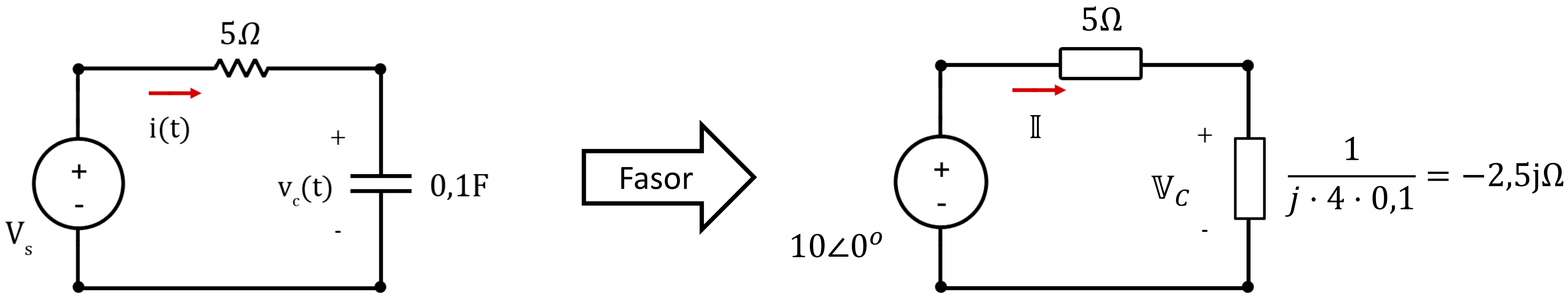


Respostas:

$$\boldsymbol{i(t) = 1,79 \cdot cos(4 \cdot t + 26,56^o\,)A}$$

$$\boldsymbol{v(t) = 4,47 \cdot cos(4 \cdot t - 63,43^o\,)V}$$

Exercício



$$Z_{eq} = 5 + \frac{1}{j \cdot 4 \cdot 0{,}1} = (5 - 2{,}5j)\Omega$$

$$0 - 2{,}5j = \sqrt{0^2 + (-2{,}5)^2} \angle \operatorname{atan}\left(-\frac{2{,}5}{0}\right)$$

$$0 - 2{,}5j = 2{,}5\angle - 90^o$$

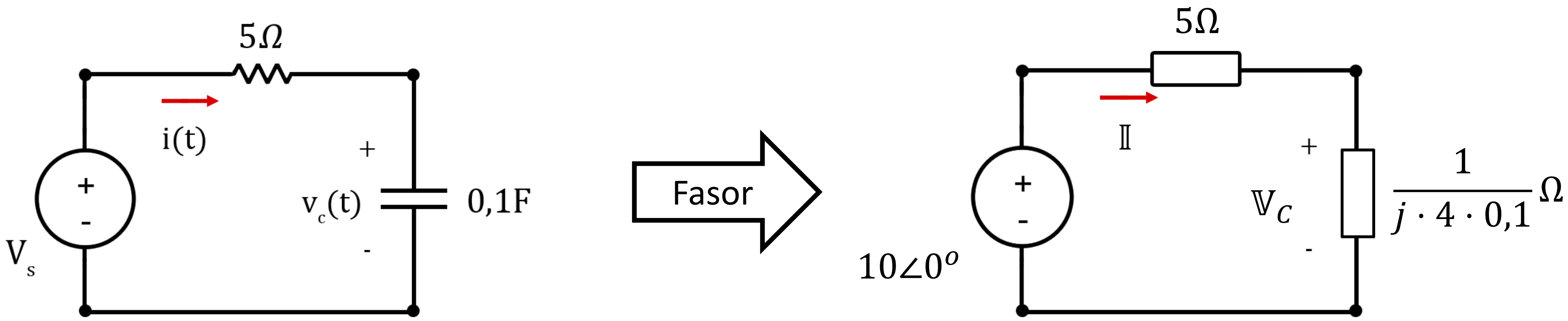
$$r = \sqrt{5^2 + (-2{,}5)^2} = 5{,}59 \quad e \quad \phi = \operatorname{atan}\left(\frac{-2{,}5}{5}\right) = -26{,}56^o$$

$$\mathbb{I} = \frac{\mathbb{V}_s}{Z_{eq}} = \frac{10\angle 0^o}{5{,}59\angle - 26{,}56^o} = \frac{10}{5{,}59}\angle\left(0^o - (-26{,}56^o)\right) = \mathbf{1{,}79\angle 26{,}56^o\ A}$$

$$\mathbb{V}_C = \mathbb{I} \cdot Z_C = (1{,}79\angle 26{,}56^o) \cdot (-2{,}5j) = (1{,}79\angle 26{,}56^o) \cdot (2{,}5\angle -90^o) = (1{,}79 \cdot 2{,}5)\angle(26{,}56^o + (-90^o))$$

$$\mathbb{V}_C = \mathbf{4{,}47\angle -63{,}43^o\ V}$$

Exercício



$$\mathbb{I} = \mathbf{1,79\angle 26,56^o}\ \boldsymbol{A}$$

$$\mathbb{V}_C = \mathbf{4,47\angle -63,43^o}\ \boldsymbol{V}$$

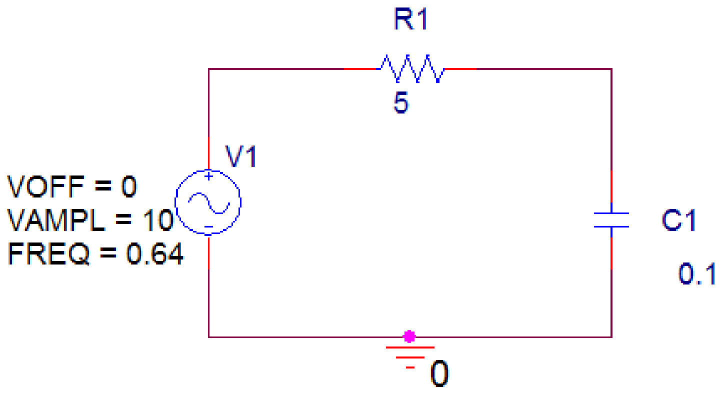
Voltando para o domínio do tempo:

$$\boldsymbol{i(t) = 1,79 \cdot cos(4 \cdot t + 26,56^o\ )A}$$

$$\boldsymbol{v(t) = 4,47 \cdot cos(4 \cdot t - 63,43^o\ )V}$$

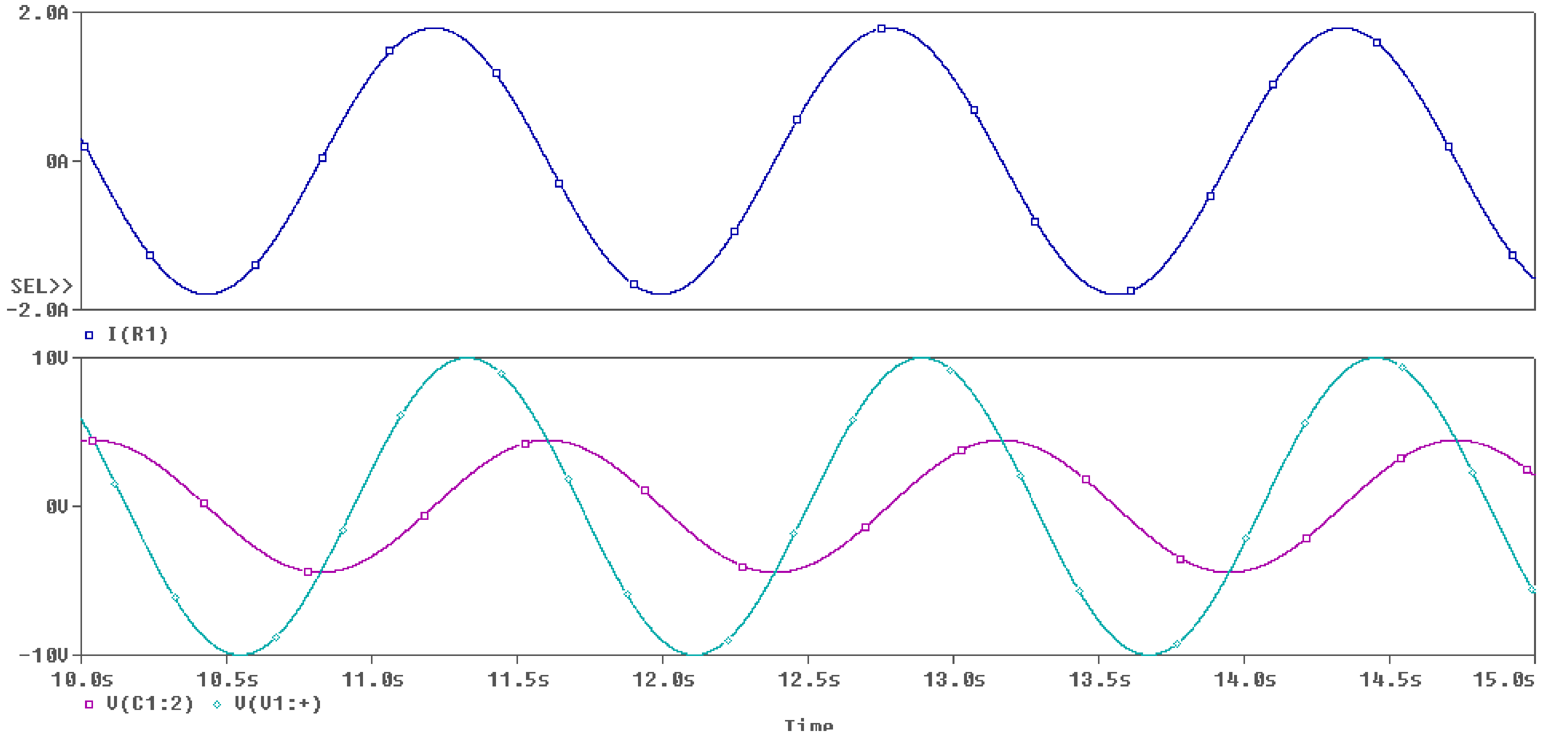
Exercício

$$i(t) = 1,79 \cdot cos(4 \cdot t + 26,56^o\ )A \qquad v(t) = 4,47 \cdot cos(4 \cdot t - 63,43^o\ )V$$



$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{4}{2 \cdot \pi} = 0,64Hz$$

Corrente



Tensão (fonte x capacitor)